

वास्तविक संख्याएँ

प्रश्नावली - 1

उदाहरण-1 4052 और 12576 का HCF युक्ति विभाजन एल्गोरिथम का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r}
 4052 \overline{) 12576} 3 \\
 \underline{12156} \\
 420 \\
 4052 9 \\
 \underline{3780} \\
 272 \\
 272 1 \\
 \underline{148} \\
 272 1 \\
 \underline{148} \\
 124 \\
 124 1 \\
 \underline{24} \\
 124 5 \\
 \underline{120} \\
 4 \\
 4 6 \\
 \underline{24} \\
 0
 \end{array}$$

- ① $12576 = 4052 \times 3 + 420$
- ② $4052 = 420 \times 9 + 272$
- ③ $420 = 272 \times 1 + 148$
- ④ $272 = 148 \times 1 + 124$
- ⑤ $148 = 124 \times 1 + 24$
- ⑥ $124 = 24 \times 5 + 4$
- ⑦ $24 = 4 \times 6 + 0$

$$\boxed{HCF = 4}$$

उदाहरण-2 दर्शाइए कि प्रत्येक धनात्मक सम पूर्णांक $2q$ के रूप का होता है तथा प्रत्येक धनात्मक विषम पूर्णांक $2q+1$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल - युक्ति विभाजन प्रमेयिका से,

दो धनात्मक पूर्णांक a एवं b के लिए, दो अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r इस प्रकार विद्यमान हैं कि →

$$\boxed{a = bq + r, \quad 0 \leq r < b}$$

(i) यदि $r = 0$ हो तो

$$a = 2q + 0$$

$$a = 2q$$

$a = 2q$, 2 से भाज्य है,

अतः यह सम पूर्णांक है।

(ii) यदि $r = 1$ हो तो

$$a = 2q + 1$$

यह 2 से अभिजात्य है,

अतः यह धन विषम पूर्णांक है।

उदाहरण-3 दर्शाइए कि एक धनात्मक विषम पूर्णांक $4q+1$ या $4q+3$ के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्णांक है।

हल - युक्ति विभाजन प्रमेयिका से,

दो धनात्मक पूर्णांक a एवं b के लिए, दो अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r इस प्रकार विद्यमान हैं कि →

$$\boxed{a = bq + r, \quad 0 \leq r < b}$$

$$\text{माना } b = 4, \quad a = 4q + r, \quad 0 \leq r < 4$$

$$(r = 0, 1, 2, 3)$$

(i) यदि $k = 0$ हो तो,

$$a = 49 + 0$$

$\Rightarrow \boxed{a = 49}$ 49, दो से भाज्य है अतः यह एक सम वर्णक है।

(ii) यदि $k = 1$ हो तो \rightarrow

$$a = 49 + 1$$

$(49 + 1)$, दो से विभाजित नहीं है अतः यह एक विषम वर्णक है।

(iii) यदि $k = 2$ हो तो,

$$a = 49 + 2$$

$$a = 2(29 + 1)$$

$(49 + 2)$, दो से भाज्य है अतः यह एक सम वर्णक है।

(iv) यदि $k = 3$ हो तो,

$$a = 49 + 3$$

$(49 + 3)$, दो से विभाजित नहीं हो रही अतः यह एक विषम वर्णक है।

उदाहरण - 4 एक मिर्च विक्रेता के पास 420 काजू की बर्फियाँ और 130 आदम की बर्फियाँ हैं। वह इनकी ट्रेजी डेरियाँ बनाया चाहती है कि प्रत्येक ट्रेरी में बर्फियों की संख्या समान रहे तथा ये टेरियाँ बर्फी की परात में न्यूनतम स्थान लें। इस काम के लिए प्रत्येक ट्रेरी में कितनी बर्फियाँ रखी जा सकती हैं।

$$\textcircled{1} \quad 420 = 130 \times 3 + 30$$

$$\textcircled{2} \quad 130 = 30 \times 4 + 10$$

$$\textcircled{3} \quad 30 = 10 \times 3 + 0$$

$$\boxed{HCF = 10}$$

$$\begin{array}{r} 130 \overline{) 420} 3 \\ \underline{390} \\ 30 \overline{) 130} 4 \\ \underline{120} \\ 10 \overline{) 30} 3 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

प्रश्नावली - 1.1

प्रश्न-1 निम्नलिखित संख्याओं का HCF ज्ञात करने के लिए सक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए।

(i) 135 और 225

1. $225 = 135 \times 1 + 90$

2. $135 = 90 \times 1 + 45$

3. $90 = 45 \times 2 + 0$

$HCF = 45$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 225} 1 \\ \underline{135} \\ 90 \overline{) 135} 1 \\ \underline{90} \\ 45 \overline{) 90} 2 \\ \underline{90} \\ 0 \end{array}$$

(ii) 196 और 38220

1. $38220 = 196 \times 195 + 0$

$HCF = 196$

$$\begin{array}{r} 196 \overline{) 38220} 195 \\ \underline{-196} \\ 1862 \\ \underline{1764} \\ 980 \\ \underline{980} \\ 0 \end{array}$$

(iii) 867 और 255

1. $867 = 255 \times 3 + 102$

2. $255 = 102 \times 2 + 51$

3. $102 = 51 \times 2 + 0$

$HCF = 51$

$$\begin{array}{r} 255 \overline{) 867} 3 \\ \underline{765} \\ 102 \overline{) 255} 2 \\ \underline{204} \\ 51 \overline{) 102} 2 \\ \underline{102} \\ 0 \end{array}$$

प्रश्न-2 दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6r+1$ या $6r+3$ या $6r+5$ के रूप का होता है, जहाँ r कोई पूर्णांक है।

हल → सक्लिड विभाजन प्रमेयिका से,

अ a व b दो धनात्मक पूर्णांकों के लिए दो अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ r और s इस प्रकार विद्यमान हैं कि

$a = bq + r, 0 \leq r < b$

माना $b = 6$,

$a = 6r + r, 0 \leq r < 6$
($r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

(i) $r = 0$ हो, तो

$a = 6r + 0$

$a = 6r$, यह 2 से विभाजित होती है। अतः $6r$ सम पूर्णांक है।

(ii) $r = 1$ हो तो

$a = 6r + 1$

यह 2 से विभाजित नहीं होती है। अतः $6n+1$ विषम पूर्णांक है।

(iii) $n = 2$ हो तो \rightarrow

$$a = 6n + 2$$

$$\Rightarrow a = 2(3n+1)$$

यह 2 से विभाज्य है। अतः $6n+2$ सम पूर्णांक है।

(iv) $n = 3$ हो तो,

$$a = 6n + 3$$

$$= 3(2n+1)$$

यह 2 से विभाजित नहीं होती है अतः $6n+3$ विषम पूर्णांक है।

(v) $n = 4$ हो तो \rightarrow

$$a = 6n + 4$$

$$a = 2(3n+2)$$

यह 2 से भाज्य है अतः $6n+4$ सम पूर्णांक है।

(vi) $n = 5$ हो तो \rightarrow

$$a = 6n + 5$$

यह 2 से विभाजित नहीं होती है अतः $6n+5$ विषम पूर्णांक है।

अतः धनात्मक विषम पूर्णांक \rightarrow

$$a = 6n+1, \quad a = 6n+3, \quad a = 6n+5$$

प्रश्न-3 किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बॅण्ड के पीछे मार्च करता है। दोनों स्तंभों को समान संख्या वाले स्तंभों में मार्च करना है। उन स्तंभों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमें वे मार्च कर सकते हैं।

$$1. \quad 616 = 32 \times 19 + 8$$

$$2. \quad 32 = 8 \times 4 + 0$$

$$\boxed{\text{HCF} = 8}$$

$$\begin{array}{r} 32 \overline{) 616} 19 \\ \underline{32} \\ 296 \\ \underline{288} \\ 8 \overline{) 32} 4 \\ \underline{32} \\ 0 \end{array}$$

प्रश्न-4 यूलिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए $3m$ या $3m+1$ के रूप का होता है।

यूलिड विभाजन प्रमेयिका से,

a और b दो धनात्मक पूर्णांकों के लिए, दो अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r इस प्रकार विभाजन है कि,

$$a = 3q + 1, \quad 0 \leq 1 < 3$$

माना $b = 3$,

$$a = 3q + 1, \quad 0 \leq 1 < 3 \rightarrow \textcircled{1}$$

(i) $1 = 0$ हो ले,

$$a = 3q + 0$$

$$\Rightarrow a = 3q$$

$$\Rightarrow a^2 = 9q^2$$

$$a^2 = 3 \times 3q^2$$

$$\text{माना } 3q^2 = m$$

$$a^2 = 3m \rightarrow \textcircled{2}$$

(ii) $1 = 1$ हो ले,

$$a = 3q + 1$$

$$\Rightarrow a^2 = (3q + 1)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = (3q)^2 + 0^2 + 2(3q)(1)$$

$$\{ (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \}$$

$$\Rightarrow a^2 = 9q^2 + 1 + 6q$$

$$\Rightarrow a^2 = 9q^2 + 6q + 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 3(3q^2 + 2q) + 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 3m + 1 \rightarrow \textcircled{3} \quad [\text{माना } 3q^2 + 2q = m]$$

(iii) $1 = 2$ हो ले,

$$a = 3q + 2$$

$$\Rightarrow a^2 = (3q + 2)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = (3q)^2 + (2)^2 + 2(3q)(2)$$

$$\Rightarrow a^2 = 9q^2 + 4 + 12q$$

$$\Rightarrow a^2 = 9q^2 + 12q + 4$$

$$\Rightarrow a^2 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 3m + 1 \rightarrow \textcircled{4}$$

उदाहरण-5 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके प्रमाणित कि किसी धनात्मक पूर्णांक a का घन $3m$, $3m+1$ या $3m+8$ के रूप का होता है।

हल यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से, a और b दो धनात्मक पूर्णांकों के लिए, दो अद्वितीय पूर्ण संख्या q और r इस प्रकार विद्यमान हैं कि,

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

माना $b = 3$,

$$a = 3q + r, \quad 0 \leq r < 3 \rightarrow \textcircled{1}$$

(i) $r = 0$ हो ले,

$$[r = 0, 1, 2]$$

$$a = 3q$$

$$\Rightarrow a^3 = (3f)^3$$

$$\Rightarrow a^3 = 27f^3$$

$$\Rightarrow a^3 = 3 \times 3f^3$$

$$\Rightarrow \boxed{a^3 = 9m} \quad [\text{माना } 3f^3 = m]$$

(ii) $n = 1$ हो लो

$$a = 3f + 1$$

$$a^3 = (3f+1)^3 \quad \{ (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \}$$

$$\Rightarrow a^3 = (3f)^3 + (1)^3 + 3(3f)^2(1) + 3(3f)(1)^2$$

$$\Rightarrow a^3 = 27f^3 + 1 + 3(9f^2) + 9f$$

$$\Rightarrow a^3 = 27f^3 + 27f^2 + 9f + 1$$

$$\Rightarrow a^3 = 3(3f^3 + 3f^2 + f) + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a^3 = 9m + 1} \quad \{ \text{माना } 3f^3 + 3f^2 + f = m \}$$

(iii) $n = 2$ हो लो

$$a = 3f + 2$$

$$\Rightarrow a^3 = (3f+2)^3$$

$$\Rightarrow a^3 = (3f)^3 + (2)^3 + 3(3f)^2(2) + 3(3f)(2)^2$$

$$\Rightarrow a^3 = 27f^3 + 8 + 6(9f^2) + 9f(4)$$

$$\Rightarrow a^3 = 27f^3 + 54f^2 + 36f + 8$$

$$\Rightarrow a^3 = 3(3f^3 + 6f^2 + 4f) + 8$$

$$\Rightarrow \boxed{a^3 = 9m + 8} \quad \{ \text{माना } 3f^3 + 6f^2 + 4f = m \}$$

उदाहरण - 5 संख्याओं 4^n पर विचार कीजिए, जहाँ n एक ठोस संख्या है। जांच कीजिए कि क्या n का कोई ऐसा मान है, जिसके लिए 4^n अंक 0 पर समाप्त होता है।

हल

$$4^n = (2 \times 2)^n$$

4^n के अभिन्न गुणनखण्डों में 5 उपस्थित नहीं है
अतः यह संख्या कभी भी 0 पर समाप्त नहीं होगी

यदि किसी संख्या के अभिन्न गुणनखण्डों में 2 एवं 5 अनिवार्य रूप से उपस्थित हो तो वह संख्या 0 पर समाप्त होगी अन्यथा नहीं।

उदाहरण - 6 संख्याओं 6 और 20 के अभिन्न गुणनखण्ड विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल - 6 और 20 के अभिन्न गुणनखण्ड

$$\begin{array}{r|l} 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

$$HCF = 2 \Rightarrow \boxed{HCF = 2}$$

$$LCM = 2^2 \times 3 \times 5 = 60 \quad \boxed{LCM = 60}$$

उदाहरण - 3 अभिन्न गुणनखण्ड विधि द्वारा 36 और 404 का HCF ज्ञात कीजिए और फिर इनका LCM ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r|l} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 2 & 9 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 404 \\ \hline 2 & 202 \\ \hline 101 & 101 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$404 = 2^2 \times 101$$

$$HCF = 2^2 = 4 \Rightarrow \boxed{HCF = 4}$$

$$LCM = 2^5 \times 3^2 \times 101 = 3636 \Rightarrow \boxed{LCM = 3636}$$

$$36 \times 404 = 4 \times LCM$$

$$LCM = \frac{36 \times 404}{4} = 36 \times 101 = 3636$$

$$\boxed{LCM = 3636}$$

उदाहरण-8

संख्या 6, 72, 120 का अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r|l} 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$6 = 2^1 \times 3^1$$

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

$$\Rightarrow HCF = 2^1 \times 3^1 = 6$$

$$\Rightarrow LCM = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

$$\Rightarrow LCM = 360$$

$$\Rightarrow \boxed{HCF = 6}$$

$$\Rightarrow \boxed{LCM = 360}$$

प्रश्नावली-1.2

प्रश्न-1 निम्नलिखित संख्याओं की अभाज्य गुणखण्डों के गुणफल के रूप में व्यक्त करें -

(i) 140

$$\begin{array}{r|l} 2 & 140 \\ \hline 2 & 70 \\ 5 & 35 \\ 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$
 $= 2^2 \times 5 \times 7$

(ii) 156

$$\begin{array}{r|l} 2 & 156 \\ \hline 2 & 78 \\ 3 & 39 \\ 13 & 13 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$
 $= 2^2 \times 3 \times 13$

(iii) 3825

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3825 \\ \hline 3 & 1275 \\ 5 & 425 \\ 5 & 85 \\ 17 & 17 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$
 $= 3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv) 5005

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5005 \\ \hline 7 & 1001 \\ 11 & 143 \\ 13 & 13 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$

(v) 7429

$$\begin{array}{r|l} 17 & 7429 \\ \hline 13 & 437 \\ 23 & 19 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$7429 = 17 \times 13 \times 23$

प्रश्न-2 पूर्णों के निम्नलिखित युग्मों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि, दो संख्याओं का गुणफल = HCF \times LCM है।

(i) 26 और 31

$$\begin{array}{r|l} 2 & 26 \\ \hline 13 & 13 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 7 & 31 \\ \hline 13 & 13 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$26 = 2 \times 13$

$31 = 7 \times 13$

$HCF = 13$

$LCM = 2^1 \times 7^1 \times 13^1$

$LCM = 182$

$HCF = 13$

$LCM = 182$

जाँच \Rightarrow

$26 \times 31 = 2366$

$LCM \times HCF = 182 \times 13 = 2366$

$LCM \times HCF = 2366$

(ii) 510 और 92

$$\begin{array}{r|l} 2 & 510 \\ \hline 3 & 255 \\ 5 & 85 \\ 17 & 17 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 92 \\ \hline 2 & 46 \\ 23 & 23 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$

$92 = 2^2 \times 23$

$HCF = 2^1$

$LCM = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \times 23^1 = 23460$

$LCM = 23460$

$HCF = 2$

$LCM = 23460$

जाँच \Rightarrow

$510 \times 92 = 46920$

$$LCM \times HCF = 2 \times 23466$$

$$LCM \times HCF = 46920$$

(iii) 336 और 54

$$\begin{array}{r|l} 2 & 336 \\ \hline 2 & 168 \\ \hline 2 & 84 \\ \hline 2 & 42 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$336 = 2^4 \times 3^1 \times 7^1$$

$$54 = 2^1 \times 3^3$$

$$HCF = 2^1 \times 3^1 = 6$$

$$LCM = 2^4 \times 3^3 \times 7^1$$

$$LCM = 3024$$

$$HCF = 6$$

$$LCM = 3024$$

अतः

$$336 \times 54 = 18144$$

$$HCF \times LCM = 6 \times 3024$$

$$\Rightarrow HCF \times LCM = 18144$$

उत्तर-3 अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णकों के HCF और LCM ज्ञात करो-

(i) 12, 15 और 21

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 21 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$12 = 2^3 \times 3^1$$

$$15 = 3^1 \times 5^1$$

$$21 = 3^1 \times 7^1$$

$$HCF = 3^1 = 3$$

$$LCM = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1 = 420$$

$$LCM = 420$$

$$HCF = 3$$

$$LCM = 420$$

(ii) 17, 23 और 29

$$\begin{array}{r|l} 17 & 17 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 23 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 29 & 29 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$17 = 17 \times 1$$

$$23 = 23 \times 1$$

$$29 = 29 \times 1$$

$$HCF = 1$$

$$LCM = 17 \times 23 \times 29 = 11339$$

$$LCM = 11339$$

$$HCF = 1$$

$$LCM = 11339$$

(iii) 8, 9 और 25

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$8 = 2^3 \times 1$$

$$9 = 3^2 \times 1$$

$$25 = 5^2 \times 1$$

$$HCF = 1$$

$$LCM = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1800$$

$$LCM = 1800$$

$$HCF = 1$$

$$LCM = 1800$$

प्रश्न-4 $HCF(306, 657) = 9$ दिया है। $LCM(306, 657)$ ज्ञात कीजिए।

दो संख्याओं का गुणनफल = $HCF \times LCM$

$$306 \times 657 = 9 \times LCM$$

$$\frac{306 \times 657}{9} = LCM$$

$$LCM = 22338$$

प्रश्न-5 जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।

हल- $6^n = (2 \times 3)^n$

6^n के अभाज्य गुणनखण्डों में 5 उपस्थित नहीं है। अतः यह 0 पर समाप्त नहीं होगी।

यदि किसी संख्या के अभाज्य गुणनखण्डों में 2 एवं 5 अनिवार्य रूप से उपस्थित हो तो वह संख्या 0 पर समाप्त होगी अन्यथा नहीं।

प्रश्न-6 जाँच कीजिए कि $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ भाज्य संख्या हैं।

$$\begin{aligned} (a) \quad & (7 \times 11 \times 13) + 13 \\ &= 13(7 \times 11 + 1) \\ &= 13(77 + 1) \\ &= 13(78) \\ &= 13 \times 78 \end{aligned}$$

दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है अतः भाज्य संख्या है।

$$\begin{aligned} (b) \quad & (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + 5 \\ &= 5(7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1) \\ &= 5(1008 + 1) \\ &= 5 \times 1009 \end{aligned}$$

दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है अतः भाज्य संख्या है।

प्रश्न-7 किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे।

हल- मान सोनिया a चक्कर तथा रवि b चक्कर लगाने के बाद प्रारम्भिक स्थान पर मिलते हैं।

$$\begin{aligned} \text{सोनिया, समय} &= 18 \times a \text{ मिनट} \\ \text{रवि, समय} &= 12 \times b \text{ मिनट} \end{aligned}$$

18 और 12 दोनों से भाज्य हैं $\therefore LCM$
18 और 12 दोनों उस संख्या के गुणज हैं।

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$18 = 2^1 \times 3^2$$

$$12 = 2^2 \times 3^1$$

$$\therefore LCM = 2^2 \times 3^2$$

$$\therefore LCM = 4 \times 9 = 36 \text{ मिनट}$$

अतः सोनिया के 2 चक्कर तथा रवि के 3 चक्कर होंगे 36 मिनट बाद वे प्रारम्भिक स्थान पर मिल जायेंगे।

प्रमेय 1.3 मान लीजिए m एक अभाज्य संख्या है। यदि m, p^2 को विभाजित करता है, तो m, p को भी विभाजित करेगी, जहाँ p एक धनात्मक पूर्णांक है।

प्रमेय 1.4 $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उपपत्ति - माना $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

\therefore माना $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [$q \neq 0, p$ एवं q सहभाज्य संख्याएँ]

$$\Rightarrow p = \sqrt{2} q \text{ वर्ग करने पर } \rightarrow$$

$$p^2 = 2q^2$$

$$\Rightarrow \boxed{q^2 = \frac{p^2}{2}} \text{ --- (1)}$$

$\frac{p^2}{2}$ एक पूर्णांक है

अतः $p^2, 2$ से भाज्य है।

$\therefore p$ भी 2 से भाज्य है।

माना $\frac{p}{2} = k_1$

$$\Rightarrow \boxed{p = 2k_1} \text{ --- (2)}$$

समीकरण (1) में रखने पर \rightarrow

$$q^2 = \frac{(2k_1)^2}{2}$$

$$q^2 = \frac{4k_1^2}{2}$$

$$\Rightarrow q^2 = 2k_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{k_1^2 = \frac{q^2}{2}} \text{ --- (3)}$$

$\frac{q^2}{2}$ एक पूर्णांक है।

$\therefore q^2, 2$ से भाज्य है।

माना, $\frac{q}{2} = k_2$ (पूर्णांक)

$$\Rightarrow \boxed{q = 2k_2} \text{ --- (4)}$$

$$p = 2 \times k_1$$

$$q = 2 \times k_2$$

समीकरण 2 एवं 4 से स्पष्ट है कि 2, p एवं q दोनों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है।

जबकि हमने माना था कि p एवं q सहअभाज्य संख्याएँ हैं।

अतः हमारा कथन असत्य है।

अतः $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

सहभाज्य - जिसमें एक के अभाज्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो।

उदाहरण-9 $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल - माना, $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः माना $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ [$q \neq 0$, p एवं q सहअभाज्य संख्या हैं]

$$\Rightarrow p = \sqrt{3}q \quad \text{वर्ग करने पर} \rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = 3q^2$$

$$\Rightarrow \boxed{q^2 = \frac{p^2}{3}} \rightarrow (1)$$

$\therefore \frac{p^2}{3}$ पूर्णांक है।

$\therefore p^2, 3$ से भाज्य है

$\therefore p, 3$ से भाज्य है

$$\text{माना, } \frac{p}{3} = k_1$$

$$\boxed{p = 3k_1} \rightarrow (2)$$

समीकरण (1) में रखने पर \rightarrow

$$q^2 = \left(\frac{3k_1}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{9k_1^2}{3}$$

$$\Rightarrow q^2 = 3k_1^2$$

$$\Rightarrow k_1^2 = \frac{q^2}{3} \rightarrow 3$$

$\therefore \frac{q^2}{3}$ एक पूर्णांक है

$\therefore q^2, 3$ से भाज्य है

$\therefore q$ भी 3 से भाज्य है।

$$\text{माना } \frac{q}{3} = k_2$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 3k_2} \rightarrow (3)$$

समीकरण 2 एवं 4 से स्पष्ट है कि 3, p एवं q का उभयनिष्ठ गुणखण्ड है।

$\therefore p$ एवं q सहअभाज्य संख्या नहीं है।

\therefore हमारा कथन गलत है।

$\therefore \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण-10 दर्शाइ कि $(5-\sqrt{3})$ एक अपरिमेय संख्या है

हल - माना, $5-\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः माना $5-\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ [$q \neq 0$, p एवं q सहअभाज्य संख्या हैं]

$$\Rightarrow \frac{5}{1} - \frac{p}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{3} = \frac{5 - p}{2}} \text{ --- (1)}$$

$\therefore p$ एवं 2 पूर्णांक हैं

$\therefore 5 - p$ भी पूर्णांक होगा

$\therefore \frac{5 - p}{2}$ एक परिमेय संख्या है।

$$\text{परन्तु } \frac{5 - p}{2} = \sqrt{3}$$

जो कि एक अपरिमेय संख्या है।

जो कि सम्भव नहीं है

अतः हमारा कथन गलत है

$\therefore (5 - \sqrt{3})$ एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण-41 दर्शाइ कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है

हल - माना, $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः माना $3\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [$q \neq 0$, p एवं q सहसम्मान्य संख्या हैं]

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{2} = \frac{p}{3q}} \text{ --- (1)}$$

$\therefore p$ एवं 3 पूर्णांक हैं

$\therefore \frac{p}{3q}$ एक परिमेय संख्या है।

परन्तु समी. (1) से $\frac{p}{3q} = \sqrt{2}$,

जो कि एक अपरिमेय संख्या है।

$\therefore \frac{p}{3q}$ अपरिमेय संख्या है।

जो हमारे पूर्व कथन का विरोधाभास है।

अतः हमारा कथन गलत है

$\therefore 3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्नावली-1.3

प्रश्न-1 $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल माना, $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$$\text{अतः माना } \sqrt{5} = \frac{p}{q}$$

[$q \neq 0$, p एवं q सहसममन्व संख्या हैं]

$$\Rightarrow p = \sqrt{5} q \quad \text{वर्ग करने पर} \rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = 5q^2$$

$$\Rightarrow \boxed{q^2 = \frac{p^2}{5}} \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\therefore \frac{p^2}{5} \text{ पूर्णांक है।}$$

$$\therefore p^2, 5 \text{ से भाज्य है}$$

$$\therefore p, 5 \text{ से भाज्य है}$$

$$\text{माना, } \frac{p}{5} = k_1$$

$$\boxed{p = 5k_1} \rightarrow \textcircled{2}$$

समीकरण $\textcircled{1}$ में रखने पर \rightarrow

$$q^2 = \left(\frac{5k_1}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{25k_1^2}{5}$$

$$\Rightarrow q^2 = 5k_1^2$$

$$\Rightarrow k_1^2 = \frac{q^2}{5} \rightarrow$$

$$\therefore \frac{q^2}{5} \text{ एक पूर्णांक है}$$

$$\therefore q^2, 5 \text{ से भाज्य है}$$

$$\therefore q \text{ भी } 5 \text{ से भाज्य है}$$

$$\text{माना } \frac{q}{5} = k_2$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 5k_2} \rightarrow \textcircled{3}$$

समीकरण 2 एवं 4 से स्पष्ट है कि 5 , p एवं q का उभयनिष्ठ गुणवत्क है।

$\therefore p$ एवं q सहसममन्व संख्या नहीं है।

\therefore हमारा कथन गलत है

$\therefore \sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 2 सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल माना $(3+2\sqrt{5})$ एक परिमेय संख्या है।

$$\text{माना } 3+2\sqrt{5} = \frac{p}{q} \quad (q \neq 0, p \text{ एवं } q \text{ सहसममन्व संख्या हैं})$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{p}{q} - \frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{p-3q}{q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{5} = \frac{p-3q}{2q}} \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\therefore p \text{ एवं } q \text{ पूर्णांक हैं}$$

$$\therefore \frac{p-3q}{2q} \text{ एक परिमेय संख्या है।}$$

परन्तु समीकरण ① से $\frac{p-31}{24} = \sqrt{5}$

जो कि एक अपरिमेय संख्या है।

∴ $\frac{p-31}{24}$ एक अपरिमेय संख्या है

∴ हमारा कथन गलत है

∴ $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है

प्रश्न-3 सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं।

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

माना $\frac{1}{\sqrt{2}}$ परिमेय संख्या है।

माना $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q}$ [$q \neq 0$, p एवं q सहअभाज्य हैं]

सुत्क्रम करने पर,

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{q}{p} \quad \text{--- ①}$$

∴ p एवं q पूर्णांक हैं

∴ $\frac{q}{p}$ एक परिमेय संख्या है।

परन्तु समीकरण ① से, $\frac{q}{p} = \sqrt{2}$

जो कि एक अपरिमेय संख्या है

अतः $\frac{q}{p}$ भी एक अपरिमेय संख्या है

यह कथन, पूर्व कथन का विरोधाभास है।

अतः हमारा कथन गलत है।

⇒ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ अपरिमेय संख्या है

(ii) $7\sqrt{2}$

माना $7\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

माना $7\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [$q \neq 0$, p एवं q सहअभाज्य संख्या हैं]

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{7q} \quad \text{--- ①}$$

∴ p एवं q पूर्णांक हैं

∴ $\frac{p}{7q}$ परिमेय संख्या है।

परन्तु समीकरण ① से $\frac{p}{7q} = \sqrt{2}$

जो कि अपरिमेय संख्या हैं

$\therefore \frac{p}{q}$ अपरिमेय संख्या हैं

यह कथन, पूर्व कथन का विरोधाभास है
अतः हमारा कथन गलत है

$\therefore \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है

(iii) $6 + \sqrt{2}$

माना $(6 + \sqrt{2})$ एक परिमेय संख्या है

माना $6 + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ($q \neq 0$, p एवं q सहअभाज्य हैं)

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} - \frac{6}{1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p-6q}{q} \quad - (1)$$

$\therefore p$ एवं q पूर्णांक हैं

$\Rightarrow \frac{p-6q}{q}$ परिमेय संख्या है

परन्तु समीकरण (1) से, $\frac{p-6q}{q} = \sqrt{2}$

और $\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।

$\therefore \frac{p-6q}{q}$ एक अपरिमेय संख्या है।

\therefore यह पूर्व कथन का विरोधाभास है

\therefore हमारा कथन यह गलत है

$\therefore 6 + \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रनावली-14

परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers)

$\left[\frac{p}{q}, q \neq 0, p \text{ और } q \text{ सहअभाज्य हैं} \right]$

सोत दशमलव उत्तर

$$q = 2^m \times 5^n$$

यहाँ m एवं n पूर्ण संख्या हैं

(पूर्ण संख्या = $0, 1, 2, 3, 4, \dots$)

(q के अभाज्य गुणवत्कों में केवल 2 और 5 केवल 2 और 5 आते हैं)

असोत दशमलव उत्तर

$$q \neq 2^m \times 5^n$$

(q के अभाज्य गुणवत्कों में 2 या 5 के अलावा कोई और अभाज्य संख्या भी आते हैं)

प्रश्न -1 बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत हैं या असांत आवर्ती हैं -

(i) $\frac{13}{3125}$ [सांत दशमलव प्रसार]

$$\begin{array}{r|l} 5 & 13 \\ \hline 5 & 65 \\ \hline 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$3125 = 5^5$$

(ii) $\frac{17}{8}$ [सांत दशमलव प्रसार]

$$\begin{array}{r|l} 2 & 17 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$8 = 2^3$$

(iii) $\frac{64}{455}$ [असांत आवर्ती]

$$\begin{array}{r|l} 5 & 64 \\ \hline 7 & 91 \\ \hline 13 & 13 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$455 = 5 \times 7 \times 13$$

(iv) $\frac{15}{1600}$

[सांत दशमलव प्रसार]

$$\frac{15}{1600} = \frac{3}{320}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 320 \\ \hline 2 & 160 \\ \hline 2 & 80 \\ \hline 2 & 40 \\ \hline 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$320 = 2^6 \times 5$$

(v) $\frac{29}{343}$ [असांत आवर्ती दशमलव प्रसार]

$$\begin{array}{r|l} 7 & 29 \\ \hline 7 & 43 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$343 = 7^3$$

(vi) $\frac{23}{2^3 \times 5^2}$

[सांत दशमलव प्रसार]

(vii) $\frac{123}{2^2 \times 5^2 \times 7^2}$

[असांत आवर्ती दशमलव प्रसार]

(viii) $\frac{6}{15}$

$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ [सांत दशमलव प्रसार]

(ix) $\frac{35}{50}$ [सांत दशमलव प्रसार]

$$\frac{35}{50} = \frac{7}{10}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 10 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(x) $\frac{77}{210}$

$$\frac{77}{210} = \frac{11}{30}$$

[असांत आवर्ती दशमलव प्रसार]

$$\begin{array}{r|l} 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

उत्तर-2 ऊपर दिए गए प्रश्न में उन परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसारों को लिखिए जो सांत हैं।

$$(i) \frac{13}{3125} = \frac{13}{5^5} \times \frac{2^5}{2^5} = \frac{13 \times 32}{10^5} = \frac{416}{100000} = \boxed{0.00416}$$

$$(ii) \frac{17}{8} = \frac{17}{2^3} \times \frac{5^3}{5^3} = \frac{17 \times 125}{10^3} = \frac{2125}{1000} = \boxed{2.125}$$

$$(iii) \frac{15}{1600} = \frac{3}{320} = \frac{3}{2^6 \times 5} \times \frac{5^4}{5^4} = \frac{3 \times 3125}{2^6 \times 5^4} = \frac{9375}{10^6} = \boxed{0.009375}$$

$$(iv) \frac{23}{2^3 5^2} = \frac{23}{2^3 5^2} \times \frac{5}{5} = \frac{115}{10^3} = \boxed{0.115}$$

$$(v) \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{10} = \boxed{0.4}$$

$$(vi) \frac{35}{50} = \frac{7}{10} = \boxed{0.7}$$

उत्तर 3 कुछ वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार नीचे दर्शाए गए हैं। प्रत्येक स्थिति के लिए निर्धारित कीजिए कि यह संख्या परिमेय संख्या है या नहीं। यदि यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ रूप की है तो q के अभाज्य गुणनखण्डों के बारे में आप क्या कह सकते हैं।

$$(i) 43.123456789$$

सांत दशमलव प्रसार है अतः यह परिमेय संख्या है।

$$\Rightarrow q = 2^m \times 5^n \text{ रूप में है।}$$

$$(ii) 0.120120012000120000 \dots \dots \dots$$

असांत आवर्ती दशमलव प्रसार है अतः यह अपरिमेय संख्या है।

$$(iii) 43.\overline{123456789}$$

$$43.123456789123456789123456789123 \dots \dots \dots$$

असांत आवर्ती दशमलव प्रसार है लेकिन यह परिमेय संख्या है।

$$\text{अतः } q \neq 2^m \times 5^n$$